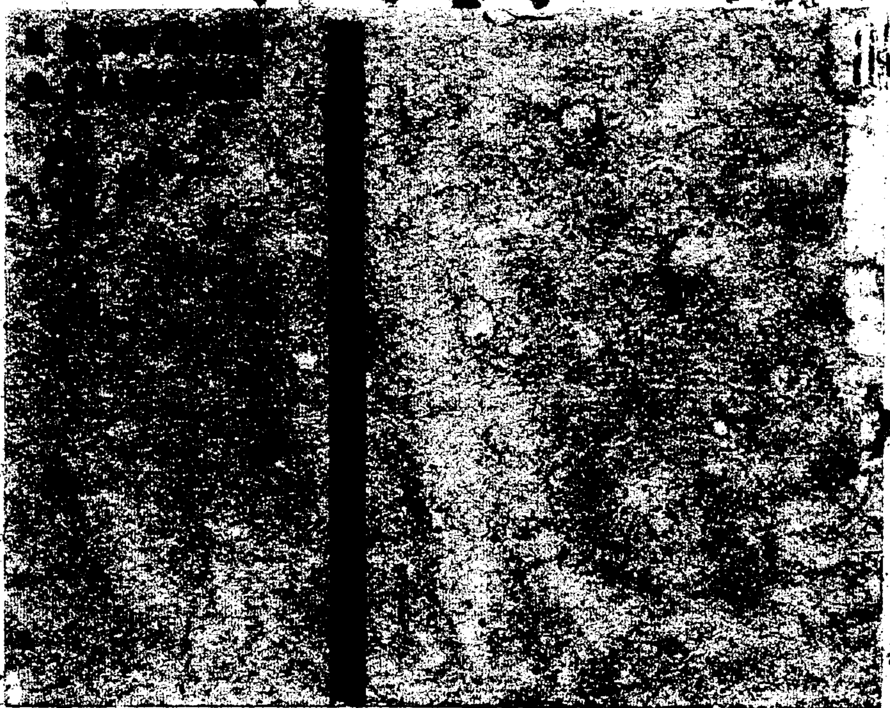


Ленинградский Институт Инженеров Путей Сообщения

Инж. Н. Н. Костромитин

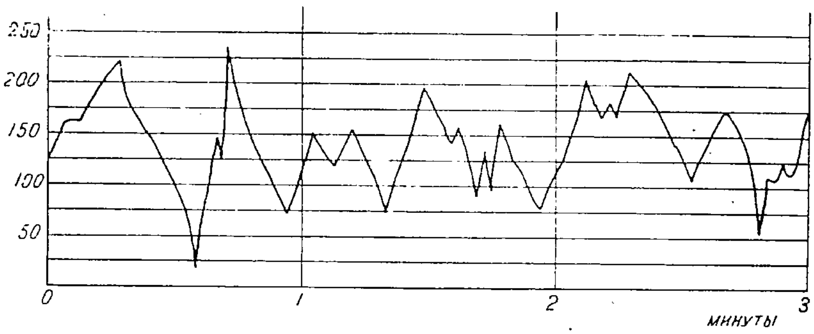
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ К ВЫБОРУ МОЩНОСТИ ТЯГОВЫХ ПОДСТАНЦИЙ

Отдельный оттиск из Сборника Института — вып. 94

ЛЕНИНГРАД
1927

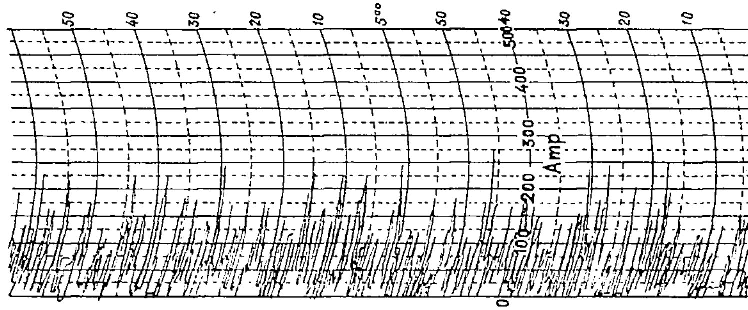
Применение теории вероятностей к выбору мощности тяговых подстанций.

Выбор мощности тяговой подстанции на проектируемой дороге является обычно одним из самых трудных вопросов, так как применяющиеся при этом методы, хотя и чрезвычайно утомительные, редко приводят к ясности в этом вопросе. Обычно рекомендуется по графику движения поездов просуммировать мощности, потребляемые в данный момент отдельными поездами и таким образом по точкам построить график нагрузки станции или подстанции.



Фиг. 1а.

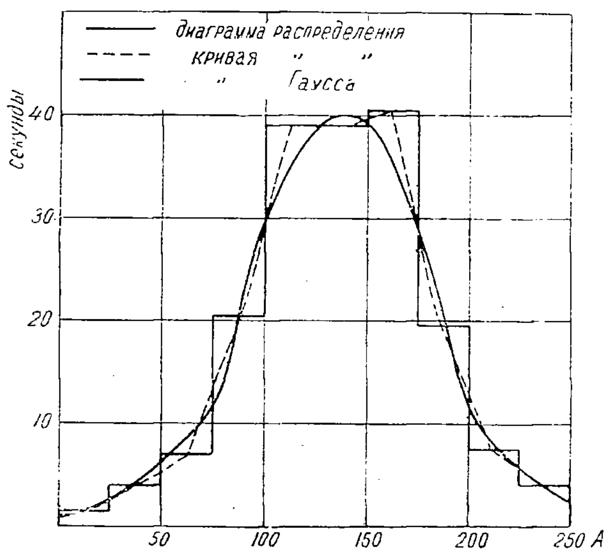
Чтобы получить график нагрузки, сколько нибудь близкий к действительности, приходится точки, по которым суммируются мощности, выбирать чрезвычайно близко одна к другой, что, конечно, крайне осложняет работу и, все-таки, не дает настоящей картины работы подстанции, тем самым, не позволяя кроме того сразу решить вопрос о мощности установки. Из приведенных графиков действующих подстанций (см. фиг 1а и 1б) видно, что для получения сколько-нибудь правильной картины надо точки графика брать не более, чем через каждую секунду. При, хотя бы, 10-минутном промежутке времени, в течение которого желательно построить график, это требует большой затраты сил и тем не менее не дает прямого ответа на вопрос о мощности подстанции: получающееся решение отвечает совершенно случайной комбинации расположения поездов даже на пригородных дорогах где движение соответствует заданному графику движения, который все-таки вряд ли будет выполнен с точностью до 1 минуты (не говоря уже о секундах).



Фиг. 1б.

Эти соображения и заставляют искать каких-нибудь законов, дающих возможность по данному графику или без него выбрать мощность подстанции.

Более или менее удовлетворительный ответ можно дать на этот вопрос, если подвергнуть анализу графики нагрузки подстанций электрических дорог. На фиг. 1б дан график, снятый самопишущим прибором на подстанции электрической ветки в Woltersdorf'e (под Берлином) при движении 3 вагонов. Из рассмотрения этого графика прежде всего видно, что большие нагрузки—пики—длятся чрезвычайно мало времени и что также сравнительно редко встречаются нулевые точки графика; значительную часть времени нагрузка находится в пределах



Фиг. 2.

близких к какой то средней величине. Наиболее удобно анализировать этот вопрос построив для данного графика кривую распределения, у которой по оси абсцисс отложены мощности или токи, а на оси ординат абсолютные или относительные частости этих токов, т.-е. выраженная в абсолютных величинах или в процентах к общей продолжительности изучаемого промежутка времени суммарная длительность тех периодов, когда ток находится в данных пределах (отложенных по абсциссе). Такая кривая, построенная для изучаемого графика, дана на фиг. 2. Пределы установлены через 25 ампер и таким образом подсчитано, сколько времени ток, потребляемый тремя вагонами, лежит между 0 и 25 *А*, между 25 и 50 *А* и т. д.

Результаты этих подсчетов указаны в таблице I.

ТАБЛИЦА I.

Токи (в амперах)	0—25	25—50	50—75	75—100	100—125	125—150	150—175	175—200	200—225	225—250	Всего
Длительности (в секундах) . .	1	4	7	20	39	39	40	19	7	4	180
Относительные частости (в процентах)	1	2	4	11	22	22	22	10	4	2	100

Затем по этим точкам был построен полигон распределения и по нему кривая распределения (фиг. 2).

Из рассмотрения этой кривой видно, что машина на подстанции прежде всего должна выдержать нагрев током, меняющимся в широких пределах, и что бывают весьма значительные отклонения от среднего значения тока на подстанции в ту или другую сторону.

Вот эти два момента и должны лечь в основу при выработке метода определения мощности подстанции.

Установка на подстанции не должна перегреться током и, кроме того, автомат, установленный на подстанции, не должен слишком часто выпадать и, таким образом, нарушать движение. Это последнее жестко связано с допустимой максимальной кратковременной перегрузкой (по круговому огню и т. д.), с числом пик за данный промежуток времени и устройством самого автомата.

Можно считать задачу решенной, если удается убедиться, что установка выбранной мощности не перегревается от данного тока, пики максимальной величины более допустимой кратковременной перегрузки будут достаточно редки и автомат выпадет не слишком большое число раз.

Данная статья ставит себе задачей: 1) дать метод к определению эквивалентного по нагреву тока на подстанции при данном характере и размерах движения и 2) указать способы определения числа выпадений автоматов вследствие совпадения больших нагрузок у всех или нескольких вагонов, обращающихся в районе питания данной подстанции (при этом учитываются выпадения только вследствие случайного совпадения перегрузок; обрывы провода, короткие замыкания и пр. в расчет не приняты).

При решении первой задачи, при определении эквивалентного на перегрев тока, сделано допущение, что таким эквивалентом может служить средний квадратичный ток.

В этом предположении имеются две неточности: 1) при переменном режиме тока выделенное количество тепла в машинах с железом не будет строго пропорционально 2-й степени тока, 2) если бы даже первое обстоятельство не существовало, температура тела, нагретого эквивалентным током, не была бы равна таковой при нагреве постоянно меняющимся током, вследствие скачков температуры, а вместе с ней изменения в интенсивности теплоотдачи.

Оба эти обстоятельства в данном случае не играют особой роли, так как применение квадратичного тока в качестве эквивалента несколько преувеличивает температуру и таким образом идет в сторону „запаса" мощности, что же касается второго соображения, то при крайней кратковременности пик и других колебаний графика скачки температуры и теплоотдачи—ничтожны.

Таким образом, необходимо найти средний квадратичный ток на подстанции при данном движении.

Введем следующие обозначения:

i_o — средний ток одного вагона
i_{eff} — средний квадратичный ток одного вагона
n — число вагонов

(при пробеге всего перегона, находящегося в районе питания подстанции.)

I_n — средний ток на подстанции.
I_{eff} — квадратичный ток на подстанции.
σ — среднее квадратичное отклонение для одного вагона.
Σ — „ „ „ на подстанции.

Средний квадратичный ток вагона может быть получен следующим образом. Пусть, например, вагон Ленинградского трамвая за 100 секунд пробега одного перегона (вместе со стоянкой) в течение 55 секунд не потребляет тока, в течение 40 секунд потребляет ток около 70 *А* и в течение 5 секунд—ток 140 *А*.

Длит.	Ток
55 *sec.*	0 *amp.*
40 „	70 „
5 „	140 „

Тогда средний ток получится, как:

$$i_o = \frac{55 \times 0 + 40 \times 70 + 5 \times 110}{100} = 35 \ amp.$$

а средний квадратичный ток

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{55 \times 0^2 + 40 \times 70^2 + 5 \times 140^2}{100}} = 56{,}5 \ amp.$$

Для определения σ — среднего квадратичного отклонения — надо иметь в виду, что эта величина связана с i_o и i_{eff} следующей простой зависимостью:

$$i_{eff} = \sqrt{i_o^2 + \sigma^2}, \text{ откуда } \sigma = \sqrt{i_{eff}^2 - i_o^2}.$$

Следовательно, зная i_{eff} и i_o для вагона Ленинградского трамвая можно всегда найти и σ.

В данном случае

$$\sigma = \sqrt{56{,}5^2 - 35^2} = 43{,}5 \text{ amp.}$$

Величина эта будет зависеть при том же i_o от изломанности графика $i = f(t)$ для вагона, так что при длинных перегонах, когда движение под током значительно более $1/2$ всего времени пробега перегона, график $i = f(t)$ получается более ровным и среднее квадратичное отклонение, т.-е. величина в сущности характеризующая рассеянность, отклонение значений данной переменной величины от ее среднего значения, будет много меньше.

Если, например, представить себе вагон, все время потребляющий ток i_o, то для него $i_{eff} = i_o$, а $\sigma = o$.

Соответственно этому I_o, I_{eff} и Σ связаны аналогичной зависимостью:

$$I_{eff} = \sqrt{I_o^2 + \Sigma^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (а)$$

Поэтому для нахождения I_{eff} надо знать I_o и Σ.

На основании теоремы теории вероятностей о математическом ожидании суммы, I_o может быть выражено через i_o и n следующим образом:

$$I_o = i_o n.$$

Что касается Σ, то она может быть выражена на основании теоремы Бернулли и выводов из нее через n и σ следующим образом.[1]

$$\Sigma = \sigma \sqrt{n}.$$

Подставляя эти значения в формулу (а) получаем

$$I_{eff} = \sqrt{n^2 i_o^2 + \sigma^2 n} = i_o n \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{i_0^2} \frac{1}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (б)$$

В таком виде формула удобна для пользования. Однако в ней можно сделать еще некоторые преобразования; обозначим $\frac{\sigma^2}{i_0^2} = \beta$, тогда формула (б) примет вид

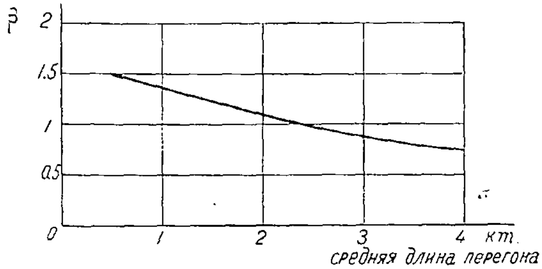
$$I_{eff} = i_o n \sqrt{1 + \beta \frac{1}{n}}. \qquad (в)$$

[1] См. курс Маркова—Исчисление Вероятностей.

Коэффициент β будет тем больше, чем короче перегоны; для Ленинградского трамвая он равен

$$\beta = \frac{43.5^2}{35^2} = 1,5.$$

Для пригородных дорог со средней длиной перегона около 2—3 *км* коэффициент $\beta \cong 1$. На фиг. 3 дана кривая для значений β, дающая возможность, не определяя i_{eff} и σ, зная только i_o, n, β, определить с достаточной для ориентировки точностью средний квадратичный ток на подстанции.



Фиг. 3.

Рассмотрим еще случай, когда подстанция питает ряд вагонов разной мощности, так что имеется ряд средних токов i_{01}, i_{02}, i_{03},... и т. д. и, соответственно им, ряд средних квадратичных отклонений σ_1, σ_2, σ_3,... и т. д. Тогда подставляемые в формулу (а) величины будут:

$$I_o = i_{01} + i_{02} + i_{03} + \ldots \ldots i_{on}$$

$$\sum = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \ldots \ldots \sigma_n^2}.$$

Формула (а) примет вид

$$I_{eff} = \sqrt{\left[i_{01} + i_{02} + i_{03} + \ldots \ldots + i_{on}\right]^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \ldots \ldots \sigma_n^2}.$$

На этом мы и остановимся при решении первой части нашей задачи.

Переходя ко второй части, подчеркнем, что мощность, определенная по среднему квадратичному току, I_{eff}, может оказаться недостаточной (особенно при очень небольшом числе вагонов) вследствие частых перегрузок при одновременных трогавиях.

Например, пусть на подстанции, питающей пригородное движение ($\beta = 1$), обращаются 3 поезда, для которых

$$i_{max} = 140\ A;\ i_o = 35\ A.$$

Тогда по формуле (в) получится

$$I_{eff} = i_o n \sqrt{1 + \beta \frac{1}{n}} = 35.3 \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \cong 120\ A.$$

Пусть, напр., максимальная кратковременная перегрузка, выше которой не пропустит автомат, троекратная (по отношению к продолжительной мощности); тогда, значит, автомат должен выключаться при токе $120 \times 3 = 360$, что покрывает троганье 2 вагонов, но не покроет троганье 3 вагонов, — $3 \times 140 = 420$ *А* [1].

Наоборот, при 10 вагонах на такой же подстанции, одновременное троганье 6 вагонов будет уже сравнительно мало вероятным и ток $6 \times 140 + 4 \times 35 = 980$ *А* может быть уже снят автоматом. Если считать, что этот ток будет равен току троекратной перегрузки, то расчетная мощность по току определится приблизительно в 320 *А*. Это совершенно не годится с точки зрения нагрева:

$$I_{eff} = 10 \times 35 \sqrt{1 + \frac{1}{10}} \cong 370\ A$$

Из этих примеров видно, что иногда мощность определенная по эффективному току больше одной трети от расчетного и достаточного частого пика, а иногда меньше.

Точной границы между условиями применения этих методов провести нельзя, но ясно, что при очень малом числе вагонов доминирующее значение будут иметь пики, а при сколько-нибудь значительном—средний квадратичный ток.

Вторая наша задача распадается на следующие вопросы:

а) определение вероятности данного пика;

б) определение средней длительности пика и числа пиков за данный период.

Для вычисления вероятности данного пика можно предложить два способа. Первый сводится к построению кривой распределения и по ней уже к нахождению вероятности того или иного пика. Второй к непосредственному вычислению вероятности того или иного совпадения.

Построение кривой распределения, не имея графика нагрузки, можно сделать, если заранее подобрать формулу для кривых такого характера. Необходимо указать, что кривые распределением графиков нагрузок при достаточно большем числе вагонов могут более или менее удачно подойти к кривой Гаусса, так наз. „нормальной кривой“, при чем, чем больше вагонов, тем ближе кривая распределения к кривой Гаусса.

---

[1] Надо иметь ввиду, что коэффициент перегрузки даваемый для тяговых установок обычно относится не к продолжительной мощности, определенной по среднему квадратичному току, а к номинальной мощности, которая несколько меньше продолжительной. Поэтому к вопросу о коэффициенте перегрузки по отношению к продолжительной мощности надо подходить весьма осторожно, пересчитывая его к другому основанию. Обычно по американским нормам, номинальной мощностью считается та, при которой машина может работать втечение 6 часов и температура машины будет в пределах 40—50°. После этого установка должна работать с перегрузкой по отношению к номинальной мощности в 50% втечение 2 часов, после чего температура не должна оказаться более чем на 5° выше максимально-допустимой.

Уравнение нормальной кривой следующее

$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$$

где

x — абсцисса—т.-е. ток, вероятность которого мы ищем;

M — абсцисса, соответствующая максимальной ординате, близкая к I_0

y — искомая вероятность

σ — среднее квадратичное отклонение

(для подстанции мы будем ставить вместо σ — $\sum$).

На той же фиг. 2 кроме полигона и кривой распределения приведена и кривая Гаусса.

В таблице II приведены для сравнения абсолютные частости 1) получаемые из исследования графика по кривой распределения и 2) соответствующие ординаты, вычисленные по уравнению Гаусса.

ТАБЛИЦА II.

Токи (в амперах)	0—25	25—50	50—75	75—100	100—125	125—150	150—175	175—200	200—225	225—250
Ординаты кривой распределения (в секундах)	1	4	7	20	39	39	40	19	7	4
Ординаты кривой Гаусса (в секундах)	1	3	9	21	36	41	36	21	9	3

Несмотря на такую большую сходимость ординат этих кривых, надо признаться, что иногда в наиболее для нас интересной части— в области больших перегрузок сходимость этих кривых особенно при малом числе вагонов нарушается, что и заставляет прибегать к более примитивным приемам—к вычислению вероятностей, пользуясь только теоремами сложения и умножения вероятностей.

Если обозначить вероятность потребления максимума у одного вагона или поезда через p, то, как известно, вероятность одновременного троганья с места n вагонов из общего числа вагонов n определится как p^n, т.-е. вероятность одновременного троганья 6 вагонов (из общего числа вагонов 6) на Ленинградском трамвае равна

$$\left(\frac{5}{100}\right)^6 = \frac{1}{64 \cdot 10^6}$$

Несколько хуже стоит вопрос в том случае, когда имеется не 6, а, скажем, 10 вагонов. Предстоит решить вопрос о вероятности троганья с места не всех десяти вагонов (p^n), а о троганьи 6 вагонов из числа 10. При этом вероятность троганья определенных шести вагонов из 10 останется та же (p^6), но появится большое число комбинаций, образующих 6 трогающихся вагонов. Число этих комбинаций представляет собой число сочетаний из 10 элементов по 6.

Поэтому вероятность того, что n вагонов из общего числа вагонов m одновременно потребляют ток maximum, с вероятностью p определится как

$$C_m^n p^n = \frac{\overbrace{m\cdot(m-1)\,(m-2)\cdot\cdot}^{n}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdot\cdot\cdot}_{n}}\,p^n$$

При пользовании этой формулой надо иметь в виду, что кроме этих 6 (n) вагонов существуют еще 4 ($m-n$) вагонов, которые могут стоять или двигаться.

Тогда, конкретизировав задачу о нахождении вероятности определенного пика, надо будет из полученной вероятности для троганья 6 вагонов из 10 взять только ту часть, при которой остальные вагоны потребляют интересующий нас ток.

Разберем это на примере: пусть при тех же цифрах потребления энергии Ленинградским трамваем:

$$140A - 5 \text{ сек};$$
$$70A - 40 \text{ сек};$$
$$0A - 55 \text{ сек};$$

мы имеем 10 вагонов и нас интересует какова вероятность того, что ток окажется более 1125 A, что соответствует троекратному среднему квадратичному току.

Действительно при $\beta = 1{,}5$

$$I_{\text{eff}} = 10 \times 35 \sqrt{1 + \frac{1{,}5}{10}} = 375A.$$

$$3\,I_{\text{eff}} = 1125A.$$

Рассмотрим все случаи, когда ток будет более этой величины.

$$1)\ 6 \text{ вагонов} \times 140 = 840a$$
$$4 \quad " \quad \times 70 = 280a$$
$$\overline{1120a}$$

$$2)\ 7 \text{ вагонов} \times 140 = 980a$$
$$3 \quad " \quad \times 70 = 210a$$
$$\overline{1190a}$$

$$
\begin{array}{rrlcrcr}
3) & 7 & \text{вагонов} & \times & 140 & = & 980a \\
 & 2 & \text{"} & \times & 70 & = & 140a \\
 & 1 & \text{"} & \times & 0 & = & 0 \\
\hline
 & & & & & & 1120a
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrlcrcr}
4) & 8 & \text{вагонов} & \times & 140 & = & 1120a \\
 & 2 & \text{"} & \times & 70 & = & 140a \\
\hline
 & & & & & & 1260a
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrlcrcr}
5) & 8 & \text{вагонов} & \times & 140 & = & 1120a \\
 & 1 & \text{"} & \times & 70 & = & 70a \\
 & 1 & \text{"} & \times & 0 & = & 0 \\
\hline
 & & & & & & 1190a
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrlcrcr}
6) & 9 & \text{вагонов} & \times & 140 & = & 1260a \\
 & 1 & \text{"} & \times & 70 & = & 70a \\
\hline
 & & & & & & 1330a
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrlcrcr}
7) & 9 & \text{вагонов} & \times & 140 & = & 1260a \\
 & 1 & \text{"} & \times & 0 & = & 0 \\
\hline
 & & & & & & 1260a.
\end{array}
$$

$$
8)\ 10\ \text{вагонов} \times 140 = 1440a
$$

Рассмотрению подлежат только случаи 2, 4, 5, 6, 7 и 8.

Начнем со случая 2.

Вероятность троганья 7 вагонов из 10 равна

$$\frac{1}{2^7 \cdot 10^7} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{12}{128 \cdot 10^6}.$$

Вероятность того, что при этом остальные три вагона находятся под током, принимая в дальнейшем для простоты вероятность $70 A$ не $\frac{45}{100}$, а $\frac{1}{2}$, будет $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; значит общая вероятность случая 2 будет

$$\frac{12}{128 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{1024 \cdot 10^6} \cong 12 \cdot 10^{-9} = 120000 \cdot 10^{-13}.$$

Случай 4.

$$\frac{1}{2^8 \cdot 10^8} \cdot \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = \frac{9}{2^9 \cdot 10^7}.$$

При этом вероятность того, что и остальные два вагона находятся под током, равна $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, т.-е. результат по 4 случаю будет

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{2^9 \cdot 10^7} = \frac{9}{2048 \cdot 10^7} = \frac{1}{23 \cdot 10^8} \cong 4 \cdot 10^{-10} = 4000 \cdot 10^{-13}.$$

Случай 5.

Здесь вероятность тоже $\frac{9}{2^9 \cdot 10^7}$; эту величину надо умножить на вероятность того, что 1 из 2 вагонов стоит, а другой находится под током, что равно $^1/_2$. Таким образом, окончательная вероятность по случаю 5:

$$\frac{9}{2^9 \cdot 10^7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{11 \cdot 10^8} \cong 1 \cdot 10^9 = 10000 \cdot 10^{-13}.$$

Случаи 6 и 7 указывают на безусловное, независимо от движения 10-го вагона, превышение предельного тока.

Таким образом, вероятность по случаям 6 и 7 будет

$$\frac{1}{2^9 \cdot 10^9} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{2^9 \cdot 10^8} \cong 200 \cdot 10^{-13}.$$

Случай 8 соответствует троганью 10 вагонов, вероятность чего

$$\frac{1}{2^{10} \cdot 10^{10}} = \frac{1}{1024 \cdot 10^{10}} = 1 \cdot 10^{-13}.$$

Сумма этих вероятностей

$$(120.000 + 4.000 + 10.000 + 200 + 1) \cdot 10^{-13} = 134201 \cdot 10^{-13}.$$

Отсюда видно, что почти исключительную роль сыграл случай 2-й, который практически только и следует принимать в расчет.

Полученная нами вероятность дает возможность решить один интересный вопрос: сколько времени за определенный срок, скажем за 1 год, нагрузка будет более $1125 A$. Зная, что в году 31104000 секунд, можно, умножив это число на полученную вероятность, найти интересующую нас величину

$$\frac{31104000 \cdot 134201}{10^{13}} \cong 4{,}2 \text{ сек.}$$

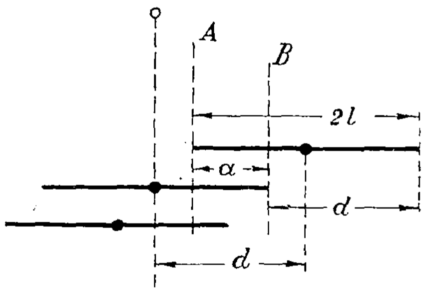
Но эта общая продолжительность перегрузки 4,2 секунды мало интересная для нас величина, так как мы совершенно не знаем из скольких пиков она складывается и какой продолжительности каждый пик; может быть это один пик в 4,2 секунды, а может быть это 360 пик, случающихся каждый день по 0,01 секунде.

Для решения этой второй задачи поставим следующий (б) вопрос—какова средняя длительность пика при данных условиях работы и сколько будет пиков данной величины за данный период.

Положим, что длительность интересующего нас пика одинакова на всех вагонах и равна $t_k = 2l$.

Тогда ясно, что длительность пика на подстанции не может быть более $t_k = 2l$, но она может быть любой величины от 0 до t_k. Это будет зависеть от взаимного расположения пиков на отдельных вагонах друг относительно друга. Действительно, если при n вагонах все они начнут трогаться одновременно и кончат период разгона одновременно—пик будет иметь длительность t_k, но если троганье одного из вагонов начнется перед окончанием разгона у всех остальных вагонов, то, ясно, пик на подстанции будет равен по длительности этой минимальной перекрыше. Вообще, при любом расположении перекрывшихся периодов времени разгона, длительность пика на подстанции будет равна длине минимальной перекрыши.

Представим себе, что совпадают трогания с места n вагонов, при чем периоды разгона изобразим, как отрезки равной длины, каким-то образом расположенные один над другим с некоторыми перекрышами (см. фиг. 4). Для этого случая можно определить, насколько вероятно, что при данном положении отрезка 1, (т.-е. при закрепленном положении разгона первого вагона) минимальная перекрыша, иначе говоря длительность пика на подстанции, будет более или равна a.



Фиг. 4.

Эта вероятность определится следующим образом: пусть центр тяжести второго отрезка вместе с самим отрезком перемещается вправо от начального положения, т.-е. от того момента, когда левый конец I отрезка оказался над правым концом II отрезка. Тогда, начиная с некоторого момента перекрыша станет равной a; в этот момент расстояние между центрами тяжести наших отрезков будет $2l - a = d$. Таким образом, центр тяжести II отрезка до момента совмещения с центром тяжести I отрезка совершит путь равный $2l$, из которого только часть d соответствует образованию перекрыши равной или большей, чем a.

Если проанализировать роль III отрезка, то при каждом положении II отрезка, соответствующем интересующему нас пику, III отрезок может занимать такие положения, что его правый конец находится левее черты A, между чертами A и B, и, наконец, нравее черты B. Из всех этих положений нас интересует только последнее, так как перекрыша более или равная a получится при данном положении II отрезка только при условии нахождения центра тяжести III отрезка между чертой 0 и центром тяжести II отрезка. Совершенно очевидно, что мы рассматриваем все время только половину всех расположений отрезков, так как и после прохождения центра тяжести II отрезка будет перекрыша более a, но картина эта вполне симметрична первой половине и поэтому нами отбрасывается.

Изучая положения IV, V и т. д. отрезков получаем аналогичные картины: каждый раз при данном положении предыдущего отрезка для получения интересующей нас перекрыши отрезок последующий совершает путь между чертой 0 и совпадением центров тяжести этих двух отрезков. Поэтому началом движения отрезков и будем считать черту 0.

Для получения интересующей нас вероятности надо иметь в виду, что уже при 3 отрезках одна и та же перекрыша получается при двух положениях отрезков. Действительно, если при данном положении

II и III отрезка получается данная перекрыша, то достаточно их переставить, т.-е. поставить III отрезок вместо II и II вместо III и мы получим другой случай, но ту же перекрышу. Учитывая все эти соображения, получим (при одной половине движения отрезков) следующее выражение вероятности (p_a) того, что при отрезах длиной $t_k - 2l$ перекрыша равна или более a:

$$p_a = (n-1)!\frac{\int_0^d dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \int_0^{x_3} dx_4 \ldots \ldots \int_0^{x_{n-1}} dx_n}{(2l)^{n-1}} =$$

$$= (n-1)!\,\frac{d^{n-1}}{(n-1)!\,(2l)^{n-1}} = \frac{d^{n-1}}{(2l)^{n-1}} = \frac{(2l-a)^{n-1}}{(2l)^{n-1}} = \left(1-\frac{a}{2l}\right)^{n-1}.$$

В этом выражении x_2, x_3, $x_4 \ldots$ обозначают координаты центров тяжести соответствующих отрезков.

Теперь определим вероятность того, что пик будет иметь длительность между a и $(a + da)$. Эта элементарная вероятность

$$dw = p_a - p_{a+da} = -dp_a,$$

т.-е.

$$dw = -dp_a = -(n-1)\left(1-\frac{a}{2l}\right)^{n-2}\left(-\frac{1}{2l}\right)da =$$

$$= (n-1)\left(1-\frac{a}{2l}\right)^{n-2}\frac{da}{2l}.$$

Для решения следующей задачи, т.-е. нахождения средней величины перекрыши, или так называемого математического ожидания перекрыши, надо соответственные величины перекрыш перемножить на их вероятности и сложить эти произведения.

Элементарные слагаемые этого математического ожидания в данном случае выразятся следующим образом:

$$dM = a\,dW\,2l;$$

$$M = \int_0^{2l} a\,(n-1)\left(1-\frac{a}{2l}\right)^{n-2}\frac{da}{2l};$$

положим

$$\left(1-\frac{a}{2l}\right) = z,$$

тогда

$$a = 2l\,(1-z)$$

и

$$da = -2l\cdot dz;$$

$$M = (n-1)\int_1^0 2l\,(1-z)\,z^{n-2}\cdot -\frac{2l\,dz}{2l} = 2l\,(n-1)\int_0^1 (z^{n-2} - z^{n-1})\,dz =$$

$$= 2l\,(n-1)\left[\frac{z^{n-1}}{n-1} - \frac{z^n}{n}\right]_0^1 = 2l\,(n-1)\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] = \frac{2l}{n} = \frac{t_k}{n}.$$

Теперь, зная среднюю длительность пика, можно по сумме времен всех пик за год или за другой промежуток времени судить о том, сколько же пик образуют такой промежуток.

В изложенном выше примере общая длительность пик была 4,2 секунды, а математическое ожидание длительности пика

$$\frac{t_k}{n} = \frac{5}{7} \text{ секунд.}$$

Следовательно, общее количество пик будет

$$\frac{4{,}2 \times 7}{5} = 6 \text{ пик за год}$$ [1].

Таким образом и вторая часть основной задачи является решенной.

Значит общий метод подбора мощности подстанций может быть рекомендован следующий:

1) установить, какие поезда, в каком количестве являются расчетными для данной подстанции,

2) в зависимости от средней длины перегона, по графику или путем нахождения i_{eff} для одного поезда, найти либо β, либо σ и, зная i_0, определить I_{eff} на станции,

3) зная величину максимальной кратковременной перегрузки, найти, какой придется поставить автомат на подстанции,

4) найти, какие случаи могут дать ток более тока автоматов,

5) принять в расчет вероятности некоторых ближайших к току автомата случаев, так как большие токи будут обычно иметь слишком ничтожную вероятность,

6) зная вероятность пика более тока в автомате, найти общую продолжительность пиков за определенный промежуток времени (месяц, неделя, год),

7) определить среднюю длительность пика и число пик за анализируемый период,

8) отбросить те из них, которые не сумеют подействовать на автомат.

Если число выпадений не слишком велико,[2]—выбранная по нагреву мощность годится; если же выпадений автомата слишком много, то следует взять пик, который будет давать не слишком много выпадений автомата, и, разделив его на максимальный коэффициент перегрузки, принять эту величину за мощность установки.

Н. Н. Костромитин.

---

[1] Надо иметь в виду, что чрезвычайно кратковременные совпадения, благодаря самоиндукции, могут и не привести к выпадению автоматов, даже если автомат и выключается мгновенно. Кроме того, иногда (напр. на пригородной дороге с густым графиком) удается регламентировать движение, чтобы избежать совпадений моментов разгона.

[2] Допустимое число выпадений автомата не может быть строго регламентировано, но можно сказать, что автоматы современных установок выпадают около 80 — 150 раз в год, что не слишком отзывается на движении. Надо иметь в виду, что большинство этих выпадений происходит вследствие коротких замыканий в вагонах, обрывах и т. д.